2.2. Numere complexe

1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ şi $z_2 = -4 + 3i$. Calculaţi $z_1 + z_2$; $3z_1 - 2z_2$.

2. Calculaţi: a) $i \cdot i^2 \cdot \ldots \cdot i^{10}$; b) $1 + i + i^2 + \ldots + i^{10}$.

3. Calculaţi:

a) $(1 - i)(1 + 2i) - 3(2 - i)$; b) $(2 + i)(3 - 2i) - (1 - 2i)(2 - i)$;

c) $\dfrac{1+4i}{4+7i}+\dfrac{1-4i}{4-7i}$; d) $\left(\dfrac{1}{1-i}-\dfrac{1}{1+i}\right)^2$;

e) $\left(\dfrac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$; f) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.

4. Demonstraţi că:

a) $\dfrac{25}{4+3i}+\dfrac{25}{4-3i} \in \mathbb{Z}$; b) $\dfrac{1+3i}{1-3i}+\dfrac{1-3i}{1+3i} \in \mathbb{R}$; c) $(1+i\sqrt{3})^3 \in \mathbb{Z}$;

d) $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$; e) $(1 - i)^{24} \in \mathbb{R}$.

5. Determinaţi:

a) partea imaginară a numărului $z=\dfrac{2+3i}{3-2i}$;

b) partea reală a numărului $z=\dfrac{2-i}{3i+4}$;

c) partea reală şi partea imaginară ale numărului complex $z=\dfrac{5+8i}{8-5i}$;

d) partea imaginară a numărului complex $z = (1 + i)^{10} + (1 - i)^{10}$.

6. a) Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi numărul complex $z=\dfrac{a+2i}{2+ai}$. Determinaţi a pentru care $z \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numărul $z=\dfrac{1}{a(1+i)+1-2i}$ să aibă partea reală egală cu $\dfrac{2}{5}$.

7. a) Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\dfrac{1+2x}{1-2i}+\dfrac{2+y}{1+2i}=i$.

b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(1-i\sqrt{3})^3=a+ib$.

8. Determinaţi forma algebrică a numerelor complexe:

a) $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{103}+i^{102}$; b) $z=1+\dfrac{1-i}{1+i}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2}+\ldots+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{9}$.

9. Determinaţi conjugatul numărului i^3+2.

10. Fie z un număr complex. Arătaţi că $i(z-\bar{z})$ este număr real.

11. Dacă $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $2\bar{z}+3z\in\mathbb{R}$, demonstraţi că $z\in\mathbb{R}$.

12. Fie $z_1=-3+2i$; $z_2=4-i$. Arătaţi că $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

13. Se consideră numărul complex $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculaţi $z+\dfrac{1}{z}$. b) Arătaţi că $z^2=\bar{z}$.

14. Determinaţi $z\in\mathbb{C}$, dacă:

a) $z+3i=6\bar{z}$; b) $2\bar{z}+z=3+4i$; c) $\dfrac{\bar{z}+7i}{z}=6$.

15. Determinaţi numerele complexe z care verifică egalitatea $z^2=i\bar{z}$.

16. Se consideră numerele complexe $z_1=3-4i$ şi $z_2=-1+2i$. Arătaţi că:

a) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; c) $|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$.

17. Calculaţi modulele numerelor complexe:

$z_1=(3-4i)(1+i)$; $z_2=\sqrt{2}-1+i(\sqrt{2}+1)$; $z_3=\dfrac{8+i}{7-4i}$;

$z_4=(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i)$; $z_5=(2+3i)^2$; $z_6=(2-i)^3+(2+i)^3$.

18. Precizaţi dacă există $z\in\mathbb{C}$ care să verifice simultan condiţiile $|z-1-2i|=3$ şi $\operatorname{Re} z\geq 5$.

19. Fie $z=a+2i$, $a\in\mathbb{R}$. Calculaţi $|z|$, ştiind că $1+i(z+\bar{z})\in\mathbb{R}$.

20. Fie $z=1+i+i^2+\ldots+i^n$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Dacă $n=2010$, calculaţi $|z|$. b) Determinaţi n, astfel încât $z\in\mathbb{R}$.

21*. Fie $z\in\mathbb{C}$, astfel încât $(z+i)^{10}+(z-i)^{10}=0$.

a) Arătaţi că $|z+i|=|z-i|$. b) Demonstraţi că $z\in\mathbb{R}$.

22. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile:
a) $z^2 = -9$; b) $z^2 - 2z + 2 = 0$; c) $z^2 - 8z + 25 = 0$; d) $z^2 = 2i$.

23. Fie z_1, z_2 soluţiile ecuaţiei $2z^2 + z + 50 = 0$. Calculaţi $|z_1| + |z_2|$.

24. Se consideră numărul complex $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi notăm cu $\bar{z} = a - bi$.
a) Calculaţi $z + \bar{z}$ şi $z \cdot \bar{z}$. b) Verificaţi dacă $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.
c) Determinaţi $c, d \in \mathbb{R}$, ştiind că $x = 3 + 4i$ verifică ecuaţia $x^2 + cx + d = 0$.

25. a) Arătaţi că $(1 - i)^2 = -2i$.
b) Rezolvaţi ecuaţia $iz^2 + (3 + i)z + 2 - 2i = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

26. Dacă z este o soluţie a ecuaţiei $z^2 + 2z + 4 = 0$, arătaţi că $z^2 - \frac{8}{z} = 0$.

27. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z^2 - z + 1 = 0$. Calculaţi:
a) $\left|z + \frac{1}{z}\right|$; b) z^3; c) $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$.

28. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = 1$.
a) Arătaţi că $z^3 = -1$. b) Calculaţi $z^{10} + z^{-10}$.

29*. Se consideră $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.
a) Calculaţi suma $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{99}$.
b) Arătaţi că $[(1 + \alpha)^{6n+2} + 1]^2 - \alpha = 0$.

30. Rezolvaţi ecuaţia $x^2 - (a + i)x + 1 + i = 0$, $a \in \mathbb{R}$, ştiind că are o soluţie reală.

31. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile:
a) $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$; b) $\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{3z+1}{z-i}\right) + 1 = 0$.

32. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţiile:
a) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$; b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

33*. Determinaţi cardinalul mulţimilor $M_2 \cup M_4$ şi $M_{12} \cup M_{16}$, dacă $M_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

34. Se consideră funcţia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 3z - 4\bar{z}$.
a) Arătaţi că $f(a + bi) = -a + 7bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Arătaţi că $(f \circ f)(z) = 25z - 24\bar{z}$.
c) Arătaţi că $f(z) = 0$ dacă şi numai dacă $z = 0$.

„Tudós hajlamai nem tették rendtársunkat sem rideggé, sem zárkózottá; derült kedélye mindvégig megtartotta keresetlen melegségét s ha néha ítéleteiből egyik-másik kedvelt filozófusának hatása alatt némi kesernyés pesszimizmus érzett is ki, ha a társadalmi rendről alkotott nézeteivel olykor az utópiák határához közeledett is: az csak a teljes jogegyenlőségért, az egyéni igaz érdem érvényesüléséért rajongó lélek túlcsapó hevülete volt, de soha sem ember- vagy világgyűlölő keserűség. Nézeteit szerette leplezetlenül feltárni, viszont szívesen hallgatta meg mások meggyőződésen alapuló véleményét; becsülte az egyenes és kíméletlen szót, de gyűlölte az alakoskodó képmutatást. Korunk megalkuvó szelleme és a korlátlanságra törő hatalom túlkapásai ellen nem egyszer kelt ki csípős szavakban, de részvéttel fordult az elnyomottak ügye felé, s humanizmusa, mély emberbaráti szeretete nemcsak szavakban nyilvánult."

„December 31-én – írja a budapesti házfőnök – elszorult szívvel vettük körül haldokló társunkat s az utolsókenet szentségében részesítettük őt, minek felvétele után bágyadt hangon többször ismételte e szavakat: «Istenem, irgalmazz, kegyelmezz». Érezve végső órájának közelgését, meghatottan nyújtotta végbúcsúra elhidegült jobbját ágyánál megjelent rendtársainak. Szenvedése, mit erős lélekkel tűrt, esti 1/2 6 órakor ért véget, a mikor csendesen, minden agónia nélkül visszaadta lelkét Teremtőjének, 1902. évi december hó 31-én, korának 58-ik és szerzetesi életének 44-ik évében, Budapesten."

Vályi Gyula tehát Schmidt Ágostontól tanult számelméletet és ábrázoló geometriát. Réthy Mór csak 1874-ben lett az elméleti fizika professzora, de a hajdani Kolozsvári Egyetem Tanrendje szerint, „komoly" matematikai diszciplínákat csak Schmidt Ágoston tanított 1874–1879 között. Köszönetet mondok Labancz Zsolt atyának, a Piarista Rendtartomány főnökének, Koltai Andrásnak, a rend levéltárosának, a Schmidt Ágostonról adott értékes adatokért, továbbá Kása Zoltán professzornak, aki felhívta a figyelmemet a Ferenc József Tudományegyetem Tanrendjének az áttanulmányozására.

IV. ORSZÁGOS MAGYAR MATEMATIKAOLIMPIA XXXI. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY*

Kolozsvár, 2022. április 20–23.

I. forduló

XI. osztály

1. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat esetén $x_1 \geq 1$ és $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét, ha $x_1 = 2$.

b) Bizonyítsd be, hogy minden $x_1 \geq 1$ kezdőérték esetén a sorozat konvergens és határértéke 1.

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1)$ határértéket!

András Szilárd, Kolozsvár

*Folytatás lapunk 2022/5–6. számából.

2. Adott az $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix.

a) Határozd meg az A^n mátrixot, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Adott az $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$, $f(x) = \dfrac{9x-7}{8x-6}$ függvény és legyen $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-szer}}$. Határozd meg az f_{2022} függvényt!

Bara Lajos, Zilah
Kocsis Attila, Déva

3. Legyen $\mathcal{A}$ azoknak az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixoknak a halmaza, amelyek esetén $\det A = 1$, illetve $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$.

a) Határozd meg a $\mathcal{T} = \{\mathrm{Tr}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt, ahol $\mathrm{Tr}(A)$ az A mátrix főátlón levő elemeinek összegét jelöli!

b) Határozd meg a $\mathcal{D} = \{\det(A + A^{-1}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt!

Tóth Csongor, Szováta

4. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatokat az $x_n = (45 + \sqrt{2022})^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$, illetve $y_n = (45 - \sqrt{2022})^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ képletekkel értelmeztük.

a) Igazold, hogy $x_n + y_n \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to+\infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}}$ határértéket, ahol $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldások

1. a) A rekurzió alapján $x_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{5}{4}$.

A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Az eddigiek alapján a $P(n)\colon x_n = \dfrac{n+1}{n}$ állítás igaz $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén. Másrészt, ha $x_k = \dfrac{k+1}{k}$ valamilyen $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor a rekurzió alapján $x_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{x_k} = 2 - \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{k+2}{k+1}$, tehát a $P(k+1)$ állítás is igaz. Így a matematikai indukció elve alapján $P(n)$ igaz, bármely $n \geq 1$ természetes számra, tehát $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) Ha $x \geq 1$, akkor egyrészt $\dfrac{1}{x} \leq 1$, és ezért $2 - \dfrac{1}{x} \geq 1$, másrészt az $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ egyenlőtlenség alapján $2 - \dfrac{1}{x} \leq x$. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy a sorozat minden tagja az $[1, +\infty)$ intervallumban van. Valóban, ha $x_k \geq 1$, akkor $x_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{x_k} \geq 1$.

Másrészt, $x_{n+1} - x_n = 2 - \dfrac{1}{x_n} - x_n \leq 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát a sorozat csökkenő. Az előbbiek alapján $x_n \in [1, 2)$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát a sorozat konvergens. Legyen $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

A rekurzióban határértékre térve azt kapjuk, hogy $\ell = 2 - \dfrac{1}{\ell}$, ahonnan $(\ell - 1)^2 = 0$, tehát $\ell = 1$.

c) Legyen $L = \lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{x_n-1}}$. A b) alpont alapján az $\dfrac{1}{x_n - 1}$ sorozat növekvő és végtelenhez tart, tehát a Cesàro–Stolz-kritérium alkalmazható. Ugyanakkor

$$\frac{1}{x_{n+1}-1} - \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{x_n}} - \frac{1}{x_n - 1} = 1,$$

tehát a Cesàro–Stolz-kritérium alapján $L = 1$.

Megjegyzés. A $\dfrac{1}{x_{n+1}-1} - \dfrac{1}{x_n - 1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x_n}} - \dfrac{1}{x_n - 1} = 1$ összefüggés alapján az általános tag tetszőleges x_1 esetén felírható, hiszen $\dfrac{1}{x_n - 1} = \dfrac{1}{x_1 - 1} + n - 1$, tehát $x_n = 1 + \dfrac{1}{n - 1 + \dfrac{1}{x_1 - 1}}$.

Természetesen az x_1 nem lehet $1 - \dfrac{1}{n-1}$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Ugyanezt az eredményt kaptuk volna akkor is, ha a lineáris törttranszformációból származó rekurziók általános megoldási módszerét alkalmaztuk volna.

2. a) Legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix}$. Mivel

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_n + 8y_n & -7x_n - 6y_n \\ 9u_n + 8v_n & -7u_n - 6v_n \end{pmatrix},$$

innen következik, hogy $\begin{cases} x_{n+1} = & 9x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = & -7x_n - 6y_n \end{cases}$ és $\begin{cases} u_{n+1} = & 9u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = & -7u_n - 6v_n, \end{cases}$ valamint tudjuk, hogy $x_1 = 9$, $y_1 = -7$, $u_1 = 8$ és $v_1 = -6$. Az első rendszer egyenleteinek megfelelő oldalait összeadva, következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_{n+1} + y_{n+1} = 2(x_n + y_n)$, tehát $x_n + y_n = 2^{n-1}(x_1 + y_1) = 2^n$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva ezt az eredményt, írhatjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén $x_n = 9x_{n-1} + 8y_{n-1} = 9x_{n-1} + 8(2^{n-1} - x_{n-1}) = x_{n-1} + 2^{n-1}$. Összeadva az összefüggéseket $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ értékekre, azt kapjuk, hogy $x_n = x_1 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{n+2} = 9 + (2^{n+3} - 1) - 1 - 2 - 4 - 8 = 2^{n+3} - 7$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Innen következik, hogy $y_n = -7 \cdot 2^n + 7$, bármely $n \geq 1$ esetén, és mivel az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatok is ugyanazt a rekurziórendszert teljesítik, mint az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, illetve az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, csak más kezdeti értékekkel, analóg módon következik, hogy $u_n = 2^{n+3} - 8$, valamint $v_n = -7 \cdot 2^n + 8$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) Az $f\colon \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ függvény homografikus (ha $ad - bc \neq 0$), és a hozzárendelt mátrixa az $M_f = A$. Tudjuk, hogy a homografikus függvények összetétele homografikus, és $M_{f\circ g} = M_f \cdot M_g$, tehát $M_{f_n} = (M_f)^n$.

Így a) alapján $M_{f_n} = A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 7 & -7(2^n - 1) \\ 8(2^n - 1) & 8 - 7 \cdot 2^n \end{pmatrix}$, bármely $n \geq 1$ esetén, tehát

$$f_{2022}(x) = \frac{(2^{2025} - 7)x - 7(2^{2022} - 1)}{8(2^{2022} - 1)x + 8 - 7 \cdot 2^{2022}}.$$

Második megoldás az a) alpontra.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja $p_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 3x + 2$, amelynek a gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

Ezért a Cayley–Hamilton-tétel egyik következménye alapján léteznek a B és C mátrixok úgy, hogy $A^n = 1^n B + 2^n C$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Meghatározzuk a B és C mátrixokat ebből az összefüggésből, felhasználva az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket: mivel $A = B + 2C$ és $A^2 = B + 4C$, következik, hogy $2C = A^2 - A$, ahonnan

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 25 & -21 \\ 24 & -20 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = A - 2C = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tehát minden $n \geq 1$ esetén

$$A^n = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 7 & -7(2^n - 1) \\ 8(2^n - 1) & 8 - 7 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

3. a) Észrevesszük, hogy $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + 2A^2 + I_2 - A^2 = (A^2 + I_2)^2 - A^2$.

A Cayley–Hamilton-tétel alapján a $\mathrm{Tr}(A) = t$ jelölést használva $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, ahonnan azt kapjuk, hogy $A^2 + I_2 = tA$.

Ezt behelyettesítve az előző összefüggésbe, következik, hogy

$$A^4 + A^2 + I_2 = (tA)^2 - A^2 = (t^2 - 1)A^2.$$

Tehát a $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$ egyenlőség egyenértékű azzal, hogy $(t^2 - 1)^2(\det A)^2 = 1$, ahonnan $(t^2 - 1)^2 = 1$, és így $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Belátható, hogy ha az A mátrix rendre a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok egyike, akkor egyrészt A teljesíti a feladat kijelentésében megadott feltételeket, másrészt pedig $\mathrm{Tr}(A)$ rendre 0, $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Tehát $\mathcal{T} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

b) Írhatjuk, hogy $\det(A + A^{-1}) = \det(A + A^{-1}) \det A = \det((A + A^{-1})A) = \det(A^2 + I_2) = \det(tA) = t^2 \det A = t^2$, tehát $\det(A + A^{-1}) \in \{0, 2\}$.

Az a) alpont megoldásának a végén megadott A mátrixok esetén a $\det(A + A^{-1})$ felveszi a 0 és 2 értékeket. Tehát $\mathcal{D} = \{0, 2\}$.

Második megoldás az a) alpontra

A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, és innen következik, hogy $A^2 + I_2 = tA$. Ez alapján $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + tA$. Tehát

$$\det(A^4 + A^2 + I_2) = \det(A^4 + tA) = \det A \cdot \det(A^3 + tI_2) = \det(A^3 + tI_2).$$

Ugyanakkor, az $A^2 + I_2 = tA$ összefüggésből következik, hogy

$$A^3 + A = tA^2 = t(tA - I_2) = t^2 A - tI_2,$$

tehát $A^3 = t^2 A - tI_2 - A$.

Ezt felhasználva következik, hogy

$$\det(A^3 + tI_2) = \det(t^2 A - A) = (t^2 - 1)^2 \det A = (t^2 - 1)^2.$$

Mivel $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$, következik, hogy $(t^2 - 1)^2 = 1$, ahonnan $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Az első megoldásban megadott példák mutatják, hogy mindhárom t érték felvevődik.

4. a) Newton binomiális képlete alapján írhatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$x_n + y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 45^{n-k} (-1)^k 2022^{\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 45^{n-k} 2002^{\frac{k}{2}} (1 + (-1)^k) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ páros}}} C_n^k 45^{n-k} 2002^{\frac{k}{2}},$$

ahonnan következik, hogy $(x_n + y_n) \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_n, y_n > 0$ és

$$y_n = (\sqrt{2025} - \sqrt{2022})^n = \left(\frac{3}{(\sqrt{2025} + \sqrt{2022})}\right)^n \in (0, 1).$$

Mivel az a) alpont alapján $\{x_n + y_n\} = 0$, ezért $\{x_n\} = 1 - y_n$.

Ugyanakkor, $x_n y_n = (45 + \sqrt{2022})^n (45 - \sqrt{2022})^n = (2025 - 2022)^n = 3^n$, ezért írhatjuk, hogy $\lim\limits_{n \to +\infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - y_n)^{\frac{x_n \cdot y_n}{3^n \cdot y_n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - y_n)^{\frac{3^n}{3^n \cdot y_n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - y_n)^{\frac{1}{y_n}} =$

$= \lim_{n\to+\infty}(1-y_n)^{-\frac{1}{y_n}\cdot(-1)} = \frac{1}{e}$, mivel $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

XII. osztály

1. Adott a $G = (-2022, 2022)$ halmaz és az $x * y = \dfrac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy}$ művelet, bármely $x, y \in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G, *)$ csoport és az $f\colon (G,*) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, $f(x) = \dfrac{2022-x}{2022+x}$ függvény csoportizomorfizmus!

b) Számítsd ki tetszőleges $n \geq 2$ természetes szám esetén a

$$\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \cdots * \frac{2022}{2n^2-1}$$

kifejezés értékét!

***

2. Határozd meg az $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x(3-\sin 2x)}$ függvény primitívjeit!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeknek létezik $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitív függvényük úgy, hogy $[f(x)] - \{f(x)\} = F(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelöli!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

4. Legyen $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ egy olyan primitív függvénnyel rendelkező függvény, amelynek valamely $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ primitívjére a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} tF\left(\dfrac{1}{t}\right)$ határérték véges. Jelöljük ezt a határértéket L-el. Bizonyítsd be, hogy a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$ függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c = L$.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldások

1. a) Igazoljuk, hogy „$*$" belső művelet G halmazon. Legyenek $x, y \in G$ tetszőlegesek. Ekkor $|x| < 2022$ és $|y| < 2022$, ezért $|xy| < 2022^2$, tehát $2022^2 + xy > 0$. Innen rendre következik, hogy

$$-2022 < x * y < 2022 \Leftrightarrow -1 < \frac{2022(x+y)}{2022^2+xy} < 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2022^2 - xy < 2022(x+y) < 2022^2 + xy \Leftrightarrow -(x+2022)(y+2022) < 0 < (2022-x)(2022-y)$, ami igaz minden $x, y \in G$ esetén. Tehát „$*$" belső művelet a G halmazon.

Belátjuk, hogy $f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$, minden $x, y \in G$ esetén. Valóban,

$$f(x*y) = f\left(\frac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy}\right) = \frac{2022 - \dfrac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy}}{2022 + \dfrac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy}} = \frac{1 - \dfrac{2022(x+y)}{2022^2+xy}}{1 + \dfrac{2022(x+y)}{2022^2+xy}} =$$

$$= \frac{2022^2 + xy - 2022(x+y)}{2022^2 + xy + 2022(x+y)} = \frac{(2022-x)(2022-y)}{(2022+x)(2022+y)} = f(x)\cdot f(y), \text{ minden } x, y \in G \text{ esetén.}$$

Az f függvény folytonos és deriválható a $(-2022, 2022)$ intervallumon, és $f'(x) = \dfrac{-2\cdot 2022}{(2022+x)^2} < 0$, minden $x \in G$ esetén, tehát f szigorúan csökkenő a G halmazon, és ezért injektív is. Másrészt, $\lim\limits_{x\searrow -2022} f(x) = +\infty$ és $\lim\limits_{x\nearrow 2022} f(x) = 0$, ezért $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, vagyis f szürjektív. Tehát f bijektív.

Mivel $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ csoport, ezért az előbbi tulajdonságok alapján $(G, *)$ is csoport és f csoportizomorfizmus.

b) Az a) alpont alapján minden $n \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \dots * \frac{2022}{2n^2-1}\right) = f\left(\frac{2022}{7}\right)\cdot f\left(\frac{2022}{17}\right)\cdot \ldots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2-1}\right).$$

Viszont minden $k \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{2k^2-1}\right) = \frac{2022 - \dfrac{2022}{2k^2-1}}{2022 + \dfrac{2022}{2k^2-1}} = \frac{2\cdot 2022k^2 - 2\cdot 2022}{2\cdot 2022k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \text{ ezért}$$

$$f\left(\frac{2022}{7}\right)\cdot f\left(\frac{2022}{17}\right)\cdot \ldots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2-1}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n}, \text{ bármely } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

esetén.

Legyen $a_n = \dfrac{2022}{7} * \dfrac{2022}{17} * \dots * \dfrac{2022}{2n^2-1}$. Ekkor $f(a_n) = \dfrac{n+1}{2n}$, de ugyanakkor $f(a_n) = \dfrac{2022 - a_n}{2022 + a_n}$, tehát $a_n = \dfrac{2022(n-1)}{3n+1}$, minden $n \geq 2$ természetes szám esetén.

2. *Első megoldás*

Az adott trigonometriai törtfüggvényt egyszerűbb törtekre bontjuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x(3 - \sin 2x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2\cos x}{3 - \sin 2x}\right).$$

Így $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2\cos x}{3 - \sin 2x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}I_2$, ahol $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x =$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + \mathcal{C} = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \mathcal{C} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \mathcal{C} \text{ és}$$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{\cos x}{3 - \sin 2x}\,\mathrm{d}x$. Legyen $J_2 = \displaystyle\int \frac{\sin x}{3 - \sin 2x}\,\mathrm{d}x$. Ekkor

$$I_2 + J_2 = \int \frac{\cos x + \sin x}{3 - \sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{2 + (\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C},$$

valamint

$$I_2 - J_2 = \int \frac{\cos x - \sin x}{3 - \sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{4 - (\sin x + \cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x}\right| + \mathcal{C}.$$

Összeadva az előbbi két eredményt, következik, hogy

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x}\right| + \mathcal{C},$$

tehát $I = \dfrac{1}{3}I_1 + \dfrac{2}{3}I_2 = \dfrac{1}{3}\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x}\right| + \mathcal{C}.$

Végezetül egy személyes emlék. Egyszer egy lengyel matematikatörténész Oberwolfachban
... *Tentamenben* a híres átdarabolási tételt, nincs benne

Második megoldás

Írhatjuk, hogy

$$I=\int\frac{1}{\sin x(3-\sin 2x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x(4-(1+\sin 2x))}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\frac{1}{\sin x(4-(\sin x+\cos x)^2)}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int\frac{1}{\sin x(2-(\sin x+\cos x))(2+(\sin x+\cos x))}\,\mathrm{d}x.$$

A $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ helyettesítést és a $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, valamint $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ képleteket használva következik, hogy

$$I=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2-\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)\left(2+\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2-2t+1)(t^2+2t+3)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{6}\int\frac{t-1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t,$$

ahol felhasználtuk az $\frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2-2t+1)(t^2+2t+3)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{3t^2-2t+1}+\frac{Dt+E}{t^2+2t+3}$ felbontást, ahonnan azt kaptuk, hogy $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$ és $E=-\frac{1}{6}$.

A kapott integrálokat a következő módon számolhatjuk ki:

$$\int\frac{t-1}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int\frac{(6t-2)-4}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{2}{3}\int\frac{1}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{2}{9}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3t-1}{\sqrt{2}}+\mathcal{C},$$

$$\int\frac{t-1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{(2t+2)-4}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+2t+3)-2\int\frac{1}{(t+1)^2+2}\,\mathrm{d}t=$$

$=\frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+2t+3)-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}$. Tehát az eredeti integrál

$$I=\frac{1}{3}\ln t-\frac{1}{12}\ln(3t^2-2t+1)+\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{3t-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{12}\cdot\ln(t^2+2t+3)-\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+\mathcal{C},$$

ahol $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

3. Az eredeti összefüggés ekvivalens az $[f(x)]-f(x)+[f(x)]=F(x)$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, vagyis az $f(x)+F(x)=2[f(x)]$, bármely $x\in\mathbb{R}$ összefüggéssel.

A feltétel alapján az f függvény folytonos, az F deriválható, tehát folytonos, ezért az $f+F$ függvény is folytonos.

Mivel $[f(x)]\in\mathbb{Z}$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, az előbbi észrevételek alapján létezik olyan $k\in\mathbb{Z}$, amelyre $[f(x)]=k$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. Innen kapjuk, hogy $f(x)+F(x)=2k$, bármely $x\in\mathbb{R}$, és beszorozva ezt az összefüggést e^x-nel, az $\left(e^x\cdot F(x)\right)'=(2k\cdot e^x)'$, bármely $x\in\mathbb{R}$ összefüggéshez jutunk. Innen következik, hogy $e^xF(x)=2ke^x+c$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, vagyis $F(x)=2k+ce^{-x}$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén.

Az előbbi össszefüggés alapján $f(x) = -ce^{-x}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $[f(x)] = k$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, következik, hogy $[-ce^{-x}] = k$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Viszont $\lim\limits_{x\to+\infty}(-ce^{-x}) = 0$, ezért $k = 0$. Másrészt $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, ezért $c = 0$. Tehát az egyetlen feltételnek megfelelő függvény a konstans nulla függvény.

4. Tekintsük a $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{2}F\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvényt. Az értelmezés és a megadott feltételek alapján $H'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{H(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} -\dfrac{x^2}{2}F\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}L.$

Ugyanakkor $x \neq 0$ esetén $H'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2F\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, tehát írhatjuk, hogy

$$H'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x^2F\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ -\dfrac{3}{2}L, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$$

Mivel ebben a felírásban a jobb oldalon megjelenő első függvény folytonos, a második függvény két primitiválható függvény különbsége, tehát ő maga is primitiválható. Másrészt csak egy konstans esetén lehet a g-nek primitívje, tehát a g pontosan akkor primitiválható, ha $c = L$.

VIII. OSZTÁLYOS TANULÓK ORSZÁGOS FELMÉRŐ VIZSGÁJA

2022. június

Minden feladat kötelező. Megjelenés 10 *pont. Munkaidő* 2 *óra.*

I. feladatsor (30 pont) – Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

1. A $10 + 10 : 10$ számítás eredménye:

a) 2 b) 9 c) 10 d) 11 (5p)

2. Ha $b \neq 0$ és $\dfrac{a}{2} = \dfrac{10}{b}$, akkor ab egyenlő:

a) 2 b) 5 c) 10 d) 20 (5p)

3. Az 5 ellentettje:

a) -5 b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) 5 (5p)

4. Az $1,3$ számot közönséges törtként írva a következő törtet kapjuk:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{13}{10}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{13}{9}$ (5p)

Végezetül egy személyes emlék. Egyszer egy lengyel matematikatörténész Oberwolfachban azt mondta nekem, hogy ő hiába kereste a *Tentamenben* a híres átdarabolási tételt, nincs benne a számtalanszor idézett eredmény! Milyen jó lenne, ha most azt írhatnám, hogy vegye csak elő a Kedves Olvasó Bolyai Farkas Tentamen köteteit és próbáljon meg ennek maga is utánanézni! Jó lenne ezt mondanom, de sajnos nem tehetem, mert a 190 évvel ezelőtt megjelent, majd a századfordulón újra kiadott munkának a mai napig nincs teljes magyar nyelvű fordítása, ami mi tagadás, szégyen!

IV. ORSZÁGOS MAGYAR MATEMATIKAOLIMPIA
XXXI. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY*
Kolozsvár, 2022. április 20–23.

II. forduló

IX. osztály

1. Igazold, hogy $2^{n^2}+13$ osztható 15-tel, bármely n páratlan természetes szám esetén!

***

2. Igazold, hogy akárhogy választunk ki 26 számot a $2,3,4,\ldots,100$ természetes számok közül, lesz két olyan, amely nem relatív prím!

***

3. Adott $a,b,c>0$ valós számok esetén léteznek-e olyan x,y,z valós számok, amelyekre $|x+a+b|+|y+b+c|+|z+c+a|+|x-a-b|+|y-b-c|+|z-c-a|=3(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$?

***

4. Az $a_1=2$ számból kiindulva minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén képezzük az a_n valós számot a következő szabály szerint: $a_1+a_2+\ldots+a_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$.

Számítsd ki a $\sum\limits_{k=1}^{2022}[\sqrt{a_k}]$ összeg értékét, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli!

***

5. Az ABC egyenlő oldalú háromszög P belső pontjából merőlegeseket húzunk az oldalakra, ezek talppontjai D,E és F. Legyen X az a pont a síkban, amelyre
$$\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})=\overrightarrow{PX}.$$
Igazold, hogy az X pont nem függ a P pont megválasztásától!

***

*Folytatás lapunk 2022/5–6., 7. és 8. számaiból.

6. Egy táblára felírunk legalább öt nemnulla természetes számot egy sorba. Egy lépésben a két szélső szám minimumát levonjuk a szélső számokból, és hozzáadjuk a második, illetve az utolsó előtti számhoz. Ha a felírt számok között megjelenik a 0, azt letöröljük. Így egy vagy két számmal kevesebb marad a táblán. Ezt a lépést mindaddig ismételjük, amíg a táblán egy vagy két szám marad. Mitől függ az, hogy a végén egy szám marad vagy kettő? Az alábbi két példa mutatja, hogy mindkét eset lehetséges.

3	4	7	8	2	1	2
1	6	7	8	2	3	
	7	7	8	3	2	
	5	9	8	5		
		14	13			

3	15	6	8	1	1	2
1	17	6	8	1	3	
	18	6	8	2	2	
	16	8	8	4		
	12	12	12			
		36				

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldások

1. *Első megoldás.* Matematikai indukcióval igazoljuk az oszthatóságot.

Második megoldás. Írhatjuk, hogy $2^{n^2}+13=15+2\left((2^4)^{\frac{(n-1)(n+1)}{4}}-1\right)$.

Ha n páratlan, akkor $\dfrac{(n-1)(n+1)}{4}=m\in\mathbb{N}$, ezért

$$2^{n^2}+13=15\left[1+2(16^{m-1}+\ldots+16+1)\right].$$

Tehát $2^{n^2}+13$ osztható 15-tel.

2. 1 és 100 között összesen 25 prímszám van, amelyek a következők:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.$$

Képezzünk 25 skatulyát és címkézzük fel őket ezekkel a prímekkel. A kiválasztott 26 szám mindegyikét abba a skatulyába helyezzük, amelynek a címkéje az adott szám legkisebb prímosztója. Mivel 26 számot helyeztünk el a 25 skatulyába, ezért van olyan skatulya, amely legalább két számot tartalmaz. Ezek a számok nem relatív prímek, mert a skatulya címkéje (amely egy prímszám) mindkét számot osztja.

3. Tételezzük fel, hogy léteznek a feladat feltételeit teljesítő valós számok. Ekkor a modulus tulajdonságai alapján $|x+a+b|+|x-a-b|=|x+a+b|+|-x+a+b|\geq|x+a+b-x+a+b|=$ $=|2a+2b|=2a+2b$.

Hasonlóan $|y+b+c|+|y-b-c|\geq 2b+2c$ és $|z+c+a|+|z-c-a|\geq 2a+2c$.

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$S=|x+a+b|+|y+b+c|+|z+c+a|+|x-a-b|+|y-b-c|+|z-c-a|\geq 4(a+b+c)$.

Másrészt a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$S=3(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})\leq 3\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=3(a+b+c).$$

Az előbbi észrevételek alapján $3(a+b+c)\geq 4(a+b+c)$, ami lehetetlen, mivel a, b, $c>0$. Tehát nem léteznek olyan x,y,z valós számok, amelyekre fennáll a kért összefüggés.

4. Minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén az első $(n+1)$ szám összegére teljesül, hogy

$$\frac{(n+3)a_{n+1}}{3}=a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}=\frac{(n+2)a_n}{3}+a_{n+1},$$

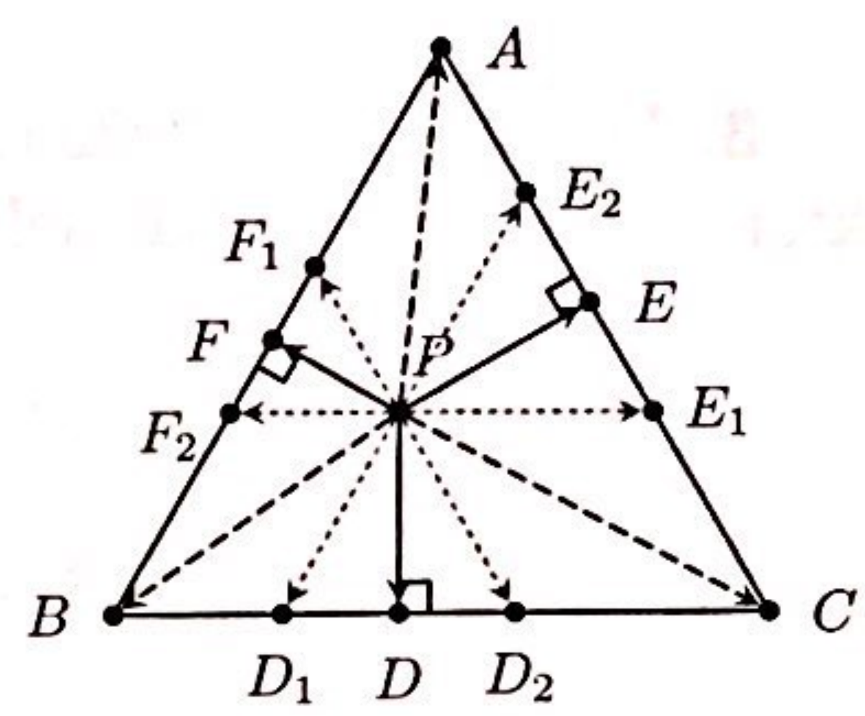
ahonnan következik, hogy $na_{n+1}=(n+2)a_n$, vagyis $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}\cdot a_n$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Ezért $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n} \cdot a_n = \dfrac{(n+2)(n+1)}{n(n-1)} \cdot a_{n-1} = \ldots = \dfrac{(n+2)(n+1)\cdot \ldots \cdot 3}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2} \cdot a_1$, vagyis $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot a_1$, tehát $a_n = n(n+1)$, mert $a_1 = 2$.

Vegyük észre, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $k^2 \leq k^2 + k < (k+1)^2$, ezért $k \leq \sqrt{a_k} < k+1$, ahonnan $[\sqrt{a_k}] = k$.

Innen következik, hogy $\sum\limits_{k=1}^{2022} [\sqrt{a_k}] = \sum\limits_{k=1}^{2022} k = \dfrac{2022 \cdot 2023}{2} = 2045253$.

5. A P ponton át párhuzamosokat húzunk az ABC háromszög oldalaival, felvesszük a D, E, F, D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2 pontokat az ábra szerint. (A $\overrightarrow{PX}$-ra megadott feltétel szimmetrikus, ezért mindegy, hogy a D, E, F pontokat melyik oldalakon vesszük fel.)



A keletkezett PD_1D_2 egyenlő oldalú háromszögben $\overrightarrow{PD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PD_1} + \overrightarrow{PD_2})$, hasonlóan $\overrightarrow{PE} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PE_1} + \overrightarrow{PE_2})$ és $\overrightarrow{PF} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2})$.

A kapott összefüggéseket összeadva, és a vektorokat újracsoportosítva kapjuk, hogy $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF} = \dfrac{1}{2}\left[(\overrightarrow{PD_1} + \overrightarrow{PF_2}) + (\overrightarrow{PE_1} + \overrightarrow{PD_2}) + (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PE_2})\right] = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA})$, ahol felhasználtuk a paralelogramma-szabályt a PF_2BD_1, PD_2CE_1, PE_2AF_1 paralelogrammákban.

Innen következik, hogy $\overrightarrow{PX} = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, vagyis X az ABC háromszög súlypontja. Tehát az X pont független a P pont megválasztásától.

6. A megoldás kulcsötlete az, hogy amennyiben a sorban levő számokat tömegeknek fogjuk fel, a rendszer tömegközéppontja nem változik az átalakítások során, tehát pontosan akkor marad egy szám a végén, ha a tömegközéppont egész szám. A formális leírás a következő: ha a számok rendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, és tekintjük az $S = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$ összeget, akkor ez az összeg nem változik. Valóban, egy lépés elvégzése után vagy az

$$S' = 1(x_1 - x_n) + 2(x_2 + x_n) + 3x_3 + \ldots + (n-1)(x_{n-1} + x_n) = S$$

összeget kapjuk, ha az utolsó szám volt a kisebb; vagy az

$$S'' = 2(x_2 + x_1) + 3x_3 + \ldots + (n-1)(x_{n-1} + x_1) + n(x_n - x_1) = S$$

összeget kapjuk, ha az első szám volt a kisebb (egyenlőség esetén mindegy).

Hasonló meggondolás alapján a számok $S_1 = x_1 + \ldots + x_n$ összege sem változik lépésről lépésre. Így a tömegközéppont, vagyis az $\dfrac{S}{S_1}$ arány invariáns. Ha a végén egy szám marad (a k. oszlopban, az első sorhoz viszonyítva), akkor a tömegközéppont $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{kS_1}{S_1} = k$. Ha a végén két szám marad, ezek x és y (a k., illetve $(k+1)$. oszlopban), akkor a tömegközéppont $\dfrac{kx + (k+1)y}{x+y} = k + \dfrac{y}{x+y}$, ami nem egész szám, mert x és y nem nulla természetes számok. Tehát pontosan akkor marad egy szám a végén, ha a tömegközéppont, azaz $\dfrac{S}{S_1}$ egy egész szám.

X. osztály

1. Oldd meg az egész számok halmazán a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet!

Baricz Árpád, Sepsiszentgyörgy

2. Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB és AD oldalán a P, illetve Q olyan pontok, amelyekre az APQ háromszög kerülete 2. Határozd meg a $\widehat{PCQ}$ mértékét!

***

3. Igazold, hogy 202204 egy síkban fekvő egységvektor között mindig van 67402 olyan vektor, amelyek közül bármely kettőnek az összege legalább egységnyi hosszúságú!

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

4. Tudva, hogy x és y az $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$ egyenletrendszer valós megoldásai, számítsd ki az $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ kifejezés értékét és oldd meg az egyenletrendszert!

***

5. Adott az AB szakasz és annak egy C belső pontja. Az AB-vel nem egybeeső, a C ponton áthaladó d egyenes az AC átmérőjű kört másodjára az E pontban, a BC átmérőjű kört másodjára az F pontban, valamint az AB átmérőjű kört a P és Q pontokban metszi. Igazold, hogy $PE = FQ$!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, tudva, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n \in \mathbb{N}^*$ és $a_{m\cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n]$, ahol az (x, y) az x és y természetes számok legnagyobb közös osztóját, $[x, y]$ pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

Turdean Katalin, Zilah

Megoldások

1. Mivel $615 + x^2$ természetes szám bármely x egész szám esetén, ezért 2^y is az kell legyen. Tehát y nem lehet negatív egész szám.

Az x^2-nek 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1; 615 osztható 3-mal; és 2^y-nak 3-mal való osztási maradéka 1, ha y páros és 2, ha y páratlan. Tehát y páros szám, vagyis $y = 2k$ alakú.

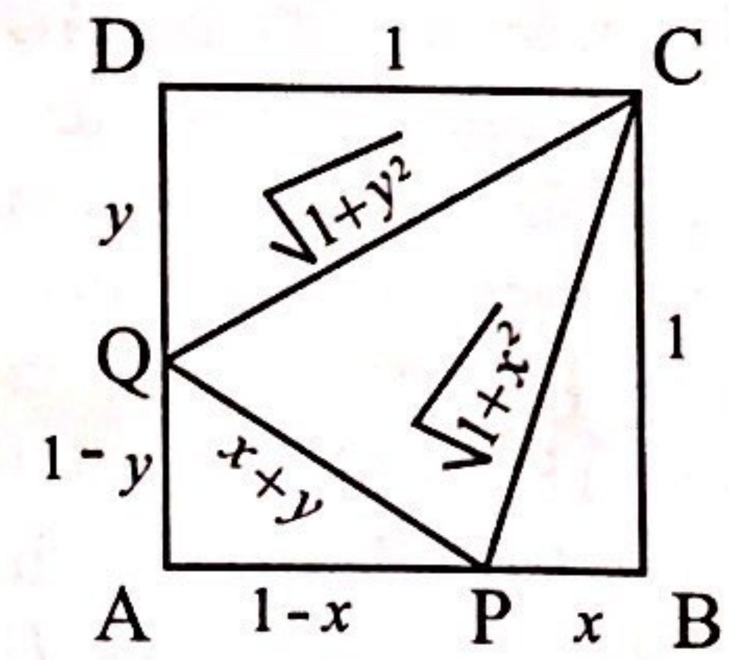
Az eredeti egyenlet $(2^k - x)(2^k + x) = 615$ alakba írható, ahol a bal oldalon szereplő tényezők közül az egyik biztosan pozitív, emiatt a másik is az kell legyen.

Mivel $(2^k - x) + (2^k + x) = 2^{k+1}$, ezért a 615-öt fel kell bontani két olyan természetes szám szorzatára, amelyeknek az összege 2-nek hatványa.

A 615 szám lehetséges felbontásai $615 = 1 \cdot 615 = 3 \cdot 205 = 5 \cdot 123 = 15 \cdot 41$ és ezek szimmetrikusai. Ezek közül csak $5 \cdot 123$ esetén lesz a tényezők összege 2-nek hatványa. Tehát $2^{k+1} = 5 + 123 = 2^7$, ahonnan $k = 6$ és $y = 12$.

Ekkor $x^2 = 2^{12} - 615 = 4096 - 615 = 3481 = 59^2$. Összefoglalva a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletnek két megoldása van az egész számok halmazán: $(x, y) \in \{(-59, 12), (59, 12)\}$.

2. Legyen $PB = x$, $DQ = y$. Így $AP = 1 - x$, $AQ = 1 - y$, $CP = \sqrt{1+x^2}$, $CQ = \sqrt{1+y^2}$. Az APQ háromszög kerülete 2, ezért $PQ = 2 - AP - AQ = x + y$. Az APQ háromszög derékszögű, ezért $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$, vagyis $(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$, ahonnan $x + y = 1 - xy$.



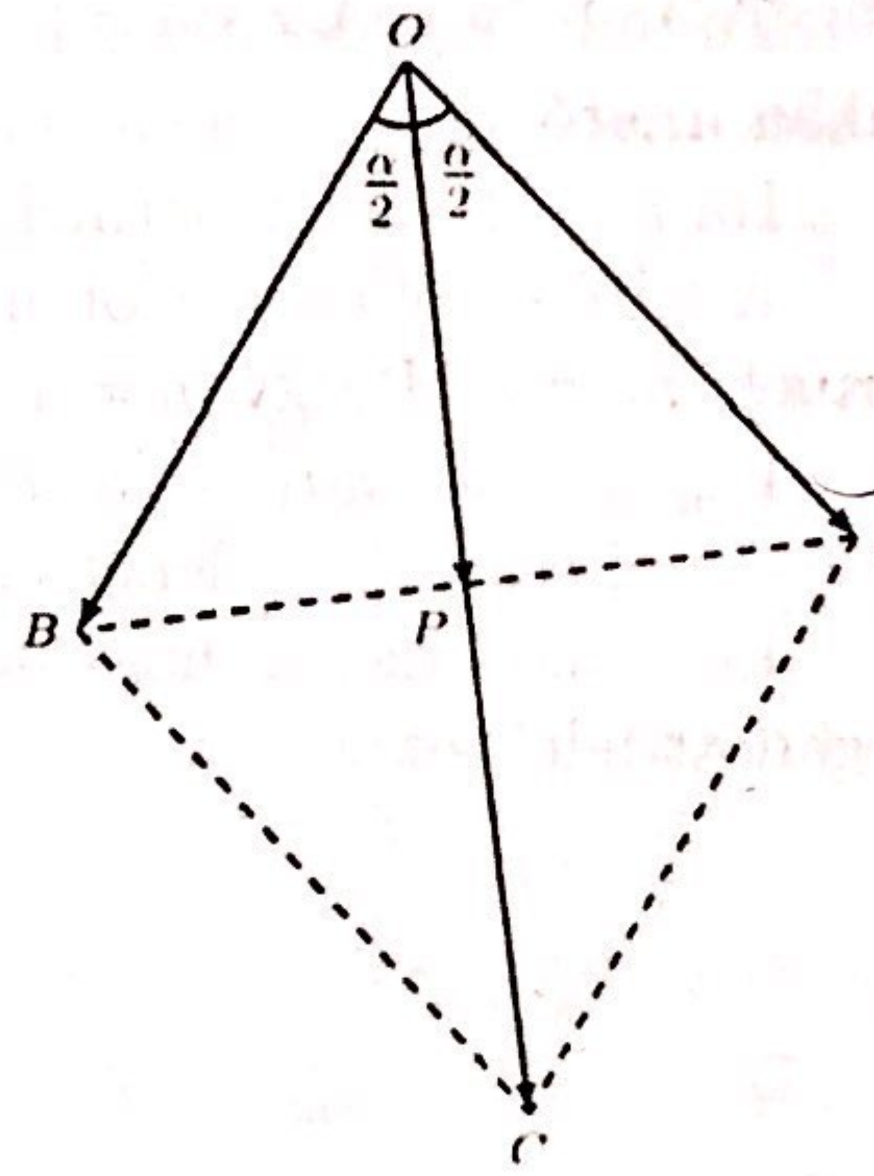
Az előbbi összefüggés mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy $x^2 + 2xy + y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$, ahonnan $x^2y^2 = x^2 + y^2 + 4xy - 1$. A PCQ háromszögben

$$\cos \widehat{PCQ} = \frac{CP^2 + CQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PC \cdot CQ} = \frac{1 + x^2 + 1 + y^2 - (x+y)^2}{2\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} = \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-xy)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}} = \sqrt{\frac{1 - 2xy + x^2 + y^2 + 4xy - 1}{1 + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + 4xy - 1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Innen következik, hogy a $\widehat{PCQ}$ mértéke 45°.

3. Tekinthetjük úgy, hogy a vektoroknak közös az O kezdőpontja és ekkor a végpontjaik az O középpontú egységsugarú körön helyezkednek el. Tekintsük az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ egységvektorokat és az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ vektort. Az OAB egyenlő szárú háromszögben P az AB szakasz felezőpontja. Ekkor $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |2\overrightarrow{OP}| = 2|\overrightarrow{OA}| \cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$, ahol $\alpha \in [0, \pi]$ az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ szöge. Az $|\overrightarrow{OC}| \geq 1$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $2\cos\frac{\alpha}{2} \geq 1$, ahonnan $\cos\frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}$, azaz $\frac{\alpha}{2} \leq 60°$, tehát $\alpha \leq 120°$. Az O középpontú egységsugarú kört felosztjuk három diszjunkt 120°-os körívre. Mivel $202204 = 3 \cdot 67401 + 1$, ezért a vektorok között biztosan van 67402 olyan, amelyeknek a végpontjai ugyanazon a köríven helyezkednek el. Ezek közül bármely kettő összegének a hossza legalább 1.



4. A második egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk $(-i)$-vel, majd összeadjuk a két egyenlet megfelelő oldalait, és azt kapjuk, hogy $(x + iy)^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Legyen $z = x + iy$. A kiszámolandó kifejezés $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = |z|^3 = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.

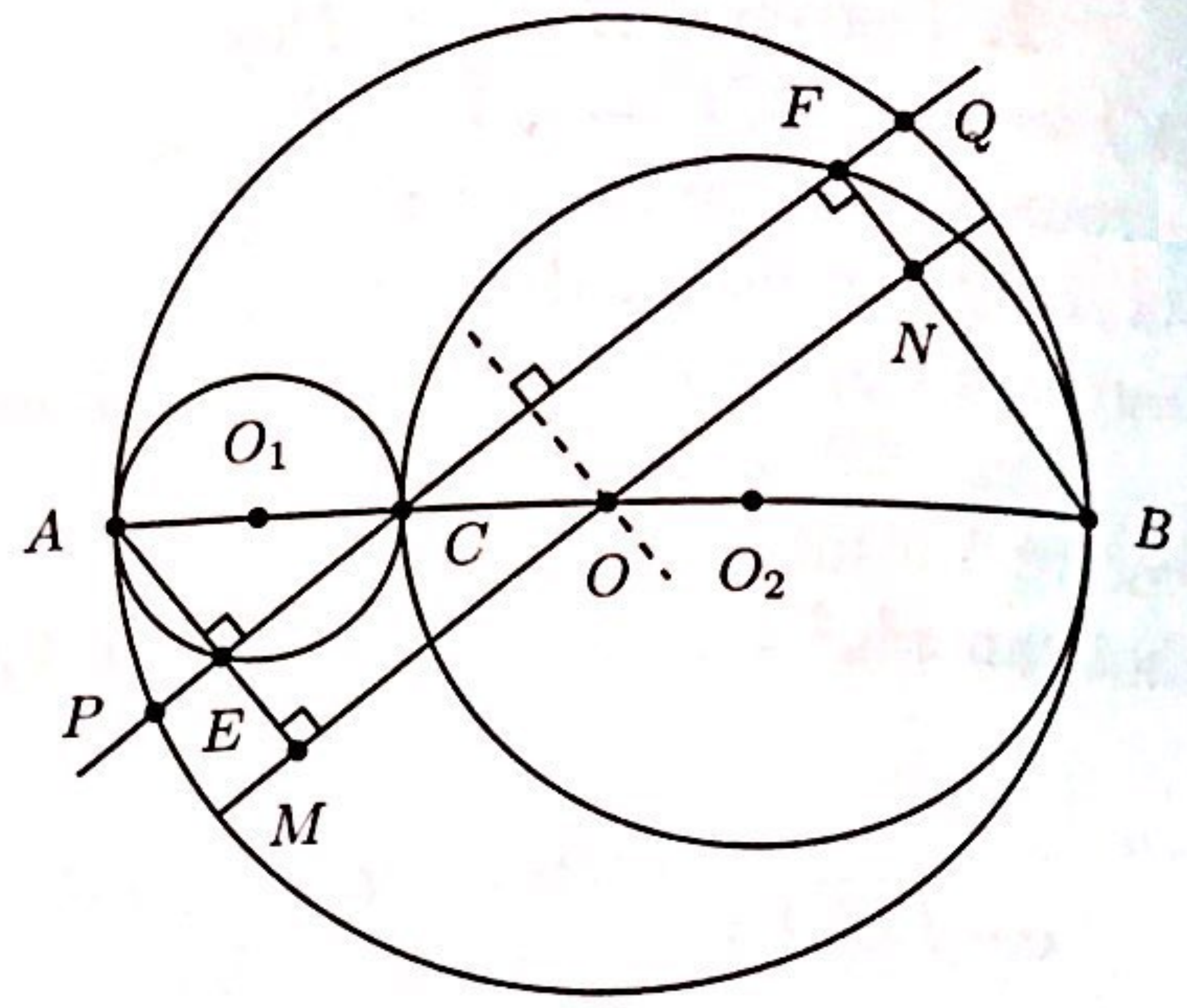
Másrészt $(x + iy)^3 = 1 + i\sqrt{3} \iff z^3 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, amelynek megoldásai

$$z_{k+1} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(6k+1)\pi}{9} + i\sin\frac{(6k+1)\pi}{9}\right), \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

De $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$, ezért a megoldások

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{9}, \\ y_1 = \sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \sqrt[3]{2}\cos\frac{7\pi}{9}, \\ y_2 = \sqrt[3]{2}\sin\frac{7\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \sqrt[3]{2}\cos\frac{13\pi}{9}, \\ y_3 = \sqrt[3]{2}\sin\frac{13\pi}{9}. \end{cases}$$

5. Legyen O az AB szakasz felezőpontja. Feltételezhetjük, hogy C az AO szakasz belsejében van. Meghúzzuk az O ponton áthaladó PQ-val párhuzamos egyenest, amely az AE egyenest az M pontban, és a BF egyenest az N pontban metszi.



Az $\widehat{AEC}$, illetve $\widehat{CFB}$ félkörbe írt kerületi szögek, ezért derékszögek, tehát az $MNFE$ négyszög egy téglalap. Az AMO és BNO háromszögek kongruensek, mert $OA = OB$, $\widehat{OMA} = \widehat{ONB} = 90°$ és $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (csúcsszögek).

Innen következik, hogy O az MN szakasz felezőpontja. Tehát az O pontból a PQ húrra húzott merőleges a PQ szakaszt felezi, valamint az $MNFE$ téglalap szimmetriatengelye, így felezi az EF szakaszt is. Tehát az EF és a PQ szakaszok felezőpontja közös, amiből következik, hogy $PE = FQ$.

Megjegyzés. A fenti megoldás abban az esetben is érvényes, ha a P és a Q pontot felcseréljük. A bizonyítás tehát ábrafüggetlen.

6. A feltétel alapján $a_{m\cdot n} = (m, a_n)\cdot[a_m, n] = (n, a_m)\cdot[a_n, m] = a_{n\cdot m}$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$. Innen következik, hogy $a^2_{m\cdot n} = (m, a_n)\cdot[m, a_n]\cdot(n, a_m)\cdot[n, a_m]$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Tudjuk, hogy ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor $a\cdot b = (a, b)\cdot[a, b]$, ezért az előbbi összefüggés a következő alakba írható: $a^2_{m\cdot n} = m\cdot n\cdot a_n\cdot a_m$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ha $m = 1$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a^2_n = n\cdot a_n\cdot a_1$, és mivel $a_n \neq 0$, ezért $a_n = na_1$.

A feltételből és az előbbi összefüggésből következik, hogy $m\cdot n\cdot a_1 = (m, na_1)\cdot[ma_1, n]$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$, így $m = 1$ esetén $na_1 = (1, na_1)\cdot[a_1, n] = 1\cdot[a_1, n]$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ugyanakkor $na_1 = (n, a_1)\cdot[n, a_1] = (n, a_1)\cdot na_1$, ahonnan $(n, a_1) = 1$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ami csak akkor lehetséges, ha $a_1 = 1$.

Innen következik, hogy $a_n = n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ez a sorozat teljesíti a feladatban megadott feltételt.

XI–XII. osztály

1. Az ABC szabályos háromszög belsejében adott egy P pont, melyre $PA = \sqrt{3}$, $PB = 2$ és $PC = 1$. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát!

***

2. Adott az ABC háromszög, valamint az $M \in (AB)$ és az $N \in (AC)$ pontok úgy, hogy $MN \nparallel BC$. Legyen $MN \cap BC = \{P\}$. Igazold, hogy az ABC, BMP, AMN és NCP háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át!

***

3. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^6 + \left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^6 = 65$ egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Legyenek $a, b, c \in (0, \infty)$ valós számok úgy, hogy $abc = 1$. Igazold a

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 4a - 4b - 4c + 12$$

egyenlőtlenséget!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

5. Egy 8×8-as sakktáblán L alakú résznek (tetraminónak) nevezzük az alábbi ábrán látható alakzatokat:

a) Jelölj meg a sakktáblán 21 mezőt úgy, hogy a sakktábla minden L alakú részén legyen legalább egy megjelölt mező!

b) Bizonyítsd be, hogy ha csak 20 mezőt jelölünk meg a sakktáblán, akkor ez a tábla biztosan tartalmaz egy olyan L alakú részt, amelyen nincs egyetlen megjelölt mező sem!

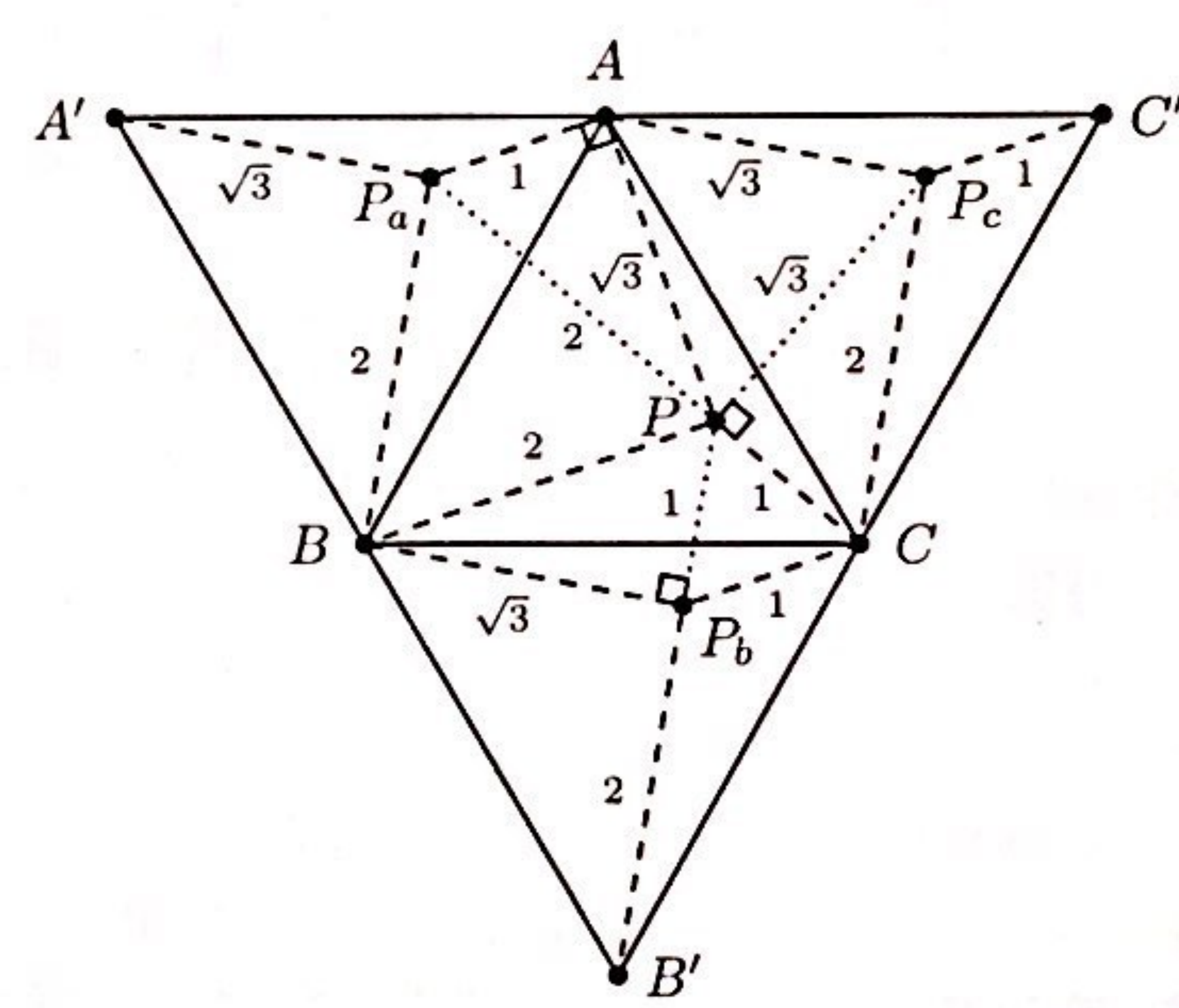
Tőtős György, Kolozsvár
András Szilárd, Kolozsvár

6. A sík koordináta-rendszerének rácspontjaiból rácspontjaiba lépegetünk. Az $O(a_0, b_0)$ pontból indulunk, ahol $a_0 = b_0 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az n-edik lépés azt jelenti, hogy az $(a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontról átlépünk egy tőle pontosan 13 egység távolságra lévő $(a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontra. Tudjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok monoton növekvők. Határozd meg, hogy legkevesebb hány lépéssel juthatunk el a $(2022, 2022)$ pontba!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy
Zsombori Gabriella, Csíkszereda

Megoldások

1. A feladatra többféle megoldás létezik, ezekből az alábbiakban bemutatunk egyet.



Az ABC háromszöget elforgatjuk $60°$-kal trigonometriai irányban a B, C, illetve az A csúcs körül. Az ábra jelölései alapján az $AP_aBP_bCP_c$ hatszög területe kétféleképpen írható fel:

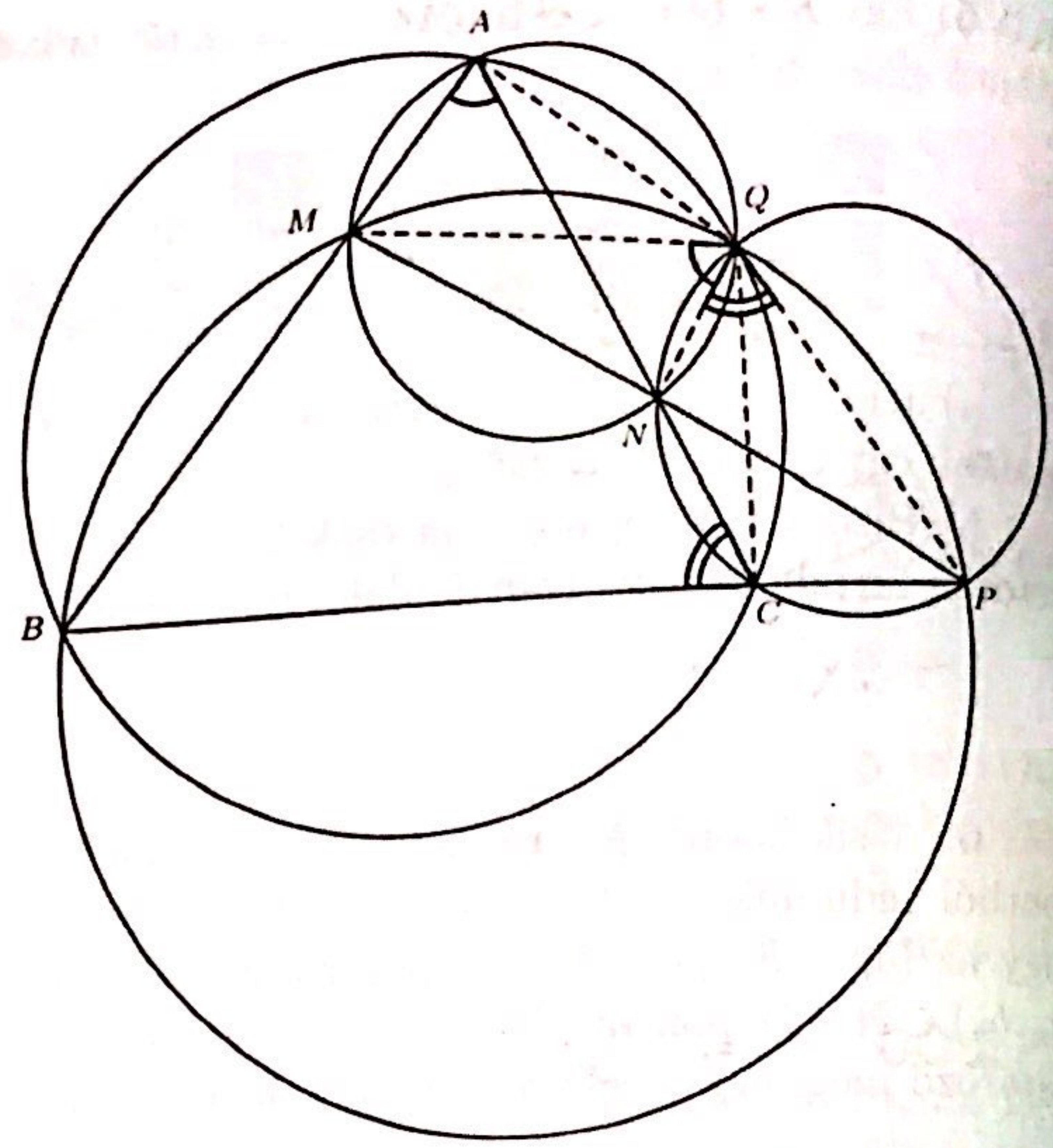
$$2 \cdot T_{ABC} = T_{AP_aBP_bCP_c} =$$
$$= T_{PP_aB} + T_{PP_bC} + T_{PP_cA} + T_{PAP_a} + T_{PBP_b} + T_{PCP_c}.$$

Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, vagyis $AP_a^2 + AP^2 = PP_a^2$, ezért a PAP_a háromszög derékszögű. Hasonlóan a PBP_b és a PCP_c háromszög is derékszögű. Így mindhárom háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $60°$-os forgatások miatt a PP_cA, PP_bC, PP_aB háromszögek egyenlő oldalúak.

Ha a-val jelöljük az ABC háromszög oldalhosszát, akkor $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1^2\sqrt{3}}{4} +$

$+\frac{\sqrt{3}^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $2a^2 = 4 + 1 + 3 + 6$, vagyis $a^2 = 7$. Tehát $a = \sqrt{7}$.



2. Az AMN és NCP háromszögek köré írt körök egyik metszéspontja N. Ha ezek a körök N-ben érintenék egymást, akkor azt kapnánk, hogy $AM \parallel PC$, ami nem igaz. Így a két körnek mindig lesz egy második metszéspontja, jelöljük ezt Q-val.

Mivel $AMNQ$ körbeírható négyszög, ezért $\widehat{MAN} \equiv \widehat{MQN}$. Az $NCPQ$ négyszög is körbeírható, így $\widehat{NQP} + \widehat{NCP} = 180°$, következik, hogy $\widehat{NQP} \equiv \widehat{ACB}$. Az előző két összefüggés alapján az $MBPQ$ négyszögben

$$\widehat{MBP} + \widehat{MQP} = \widehat{ABC} + \left(\widehat{MQN} + \widehat{NQP}\right) = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°,$$

tehát az $MBPQ$ négyszög körbeírható.

Az $MBPQ$ négyszög köré írt kör megegyezik a BMP háromszög köré írt körrel, ezért a BMP háromszög köré írt kör átmegy a Q ponton. Hasonlóan igazolható, hogy az $ABCQ$ négyszög is körbeírható:

$$\widehat{ABC} + \widehat{AQC} = \widehat{ABC} + \left(\widehat{AQN} + \widehat{NQC}\right) = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} + \widehat{MPB} = 180°.$$

Így az ABC háromszög köré írt kör is átmegy a Q ponton.

3. Értelmezzük az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + \left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^6 - 65$ folytonos és deriválható függvényt. Ekkor $f'(x) = 6x^5\left(1 + 2^7(x+2)^{-7}\right)$, vagyis $f'(x) = 0$, ha $x = 0$ vagy $x = -4$.

Elkészítjük az f függvény változási táblázatát.

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty \mid -\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$2^{13} - 65 > 0$	$+\infty \mid +\infty$	-65	$+\infty$

Ennek alapján az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan két valós gyöke van, egy a $(-2, 0)$ intervallumban, egy pedig a $(0, +\infty)$ intervallumban. Észrevesszük, hogy $x = -1$ és $x = 2$ megoldás és az eddigiek alapján pontosan ez a két valós megoldása van ennek az egyenletnek.

4. *Első megoldás.* A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

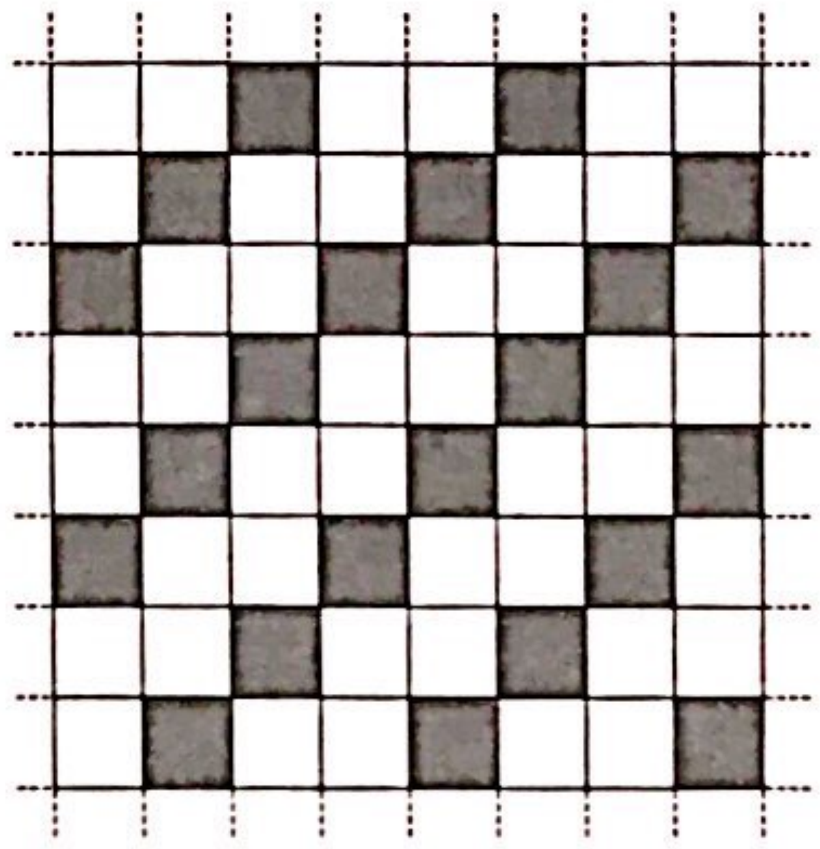
Az igazolandó egyenlőtlenség szimmetrikus, ezért feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c > 0$. Ekkor a rendezési tétel alapján felírhatjuk az $a^3 + b^3 + c^3 \geq ba^2 + cb^2 + ac^2$, $a^3 + b^3 + c^3 \geq ca^2 + ab^2 + bc^2$, $a^3 + b^3 + c^3 \geq aa^2 + bb^2 + cc^2$ egyenlőtlenségeket. Ezen egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, ahonnan $3(a^3+b^3+c^3) \geq 3(a^2+b^2+c^2)$. Innen a

$$9(a^3 + b^3 + c^3) + 4(a+b+c) \geq 9(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a+b+c)$$

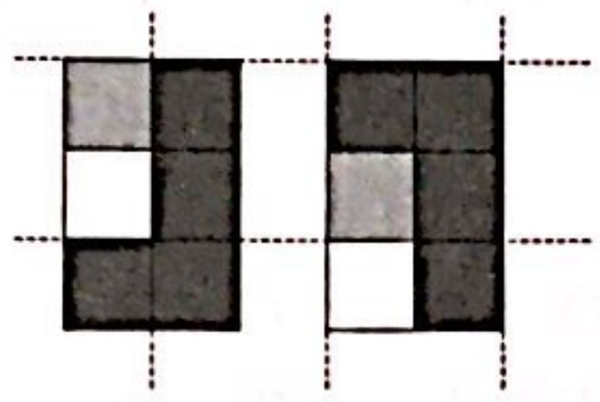
eredményhez jutunk. Mivel $4(a+b+c) \geq 4 \cdot 3 = 12$, ezért a tagok átrendezése után a $9a^3+9b^3+9c^3 \geq 9a^2+9b^2+9c^2-4a-4b-4c+12$ igaz egyenlőtlenséget kapjuk.

Második megoldás. A feladat a Jensen-féle egyenlőtlenség alkalmazásával is megoldható.

5. a) Az 1. ábrán megjelölt 21 mező teljesíti a kért feltételeket.



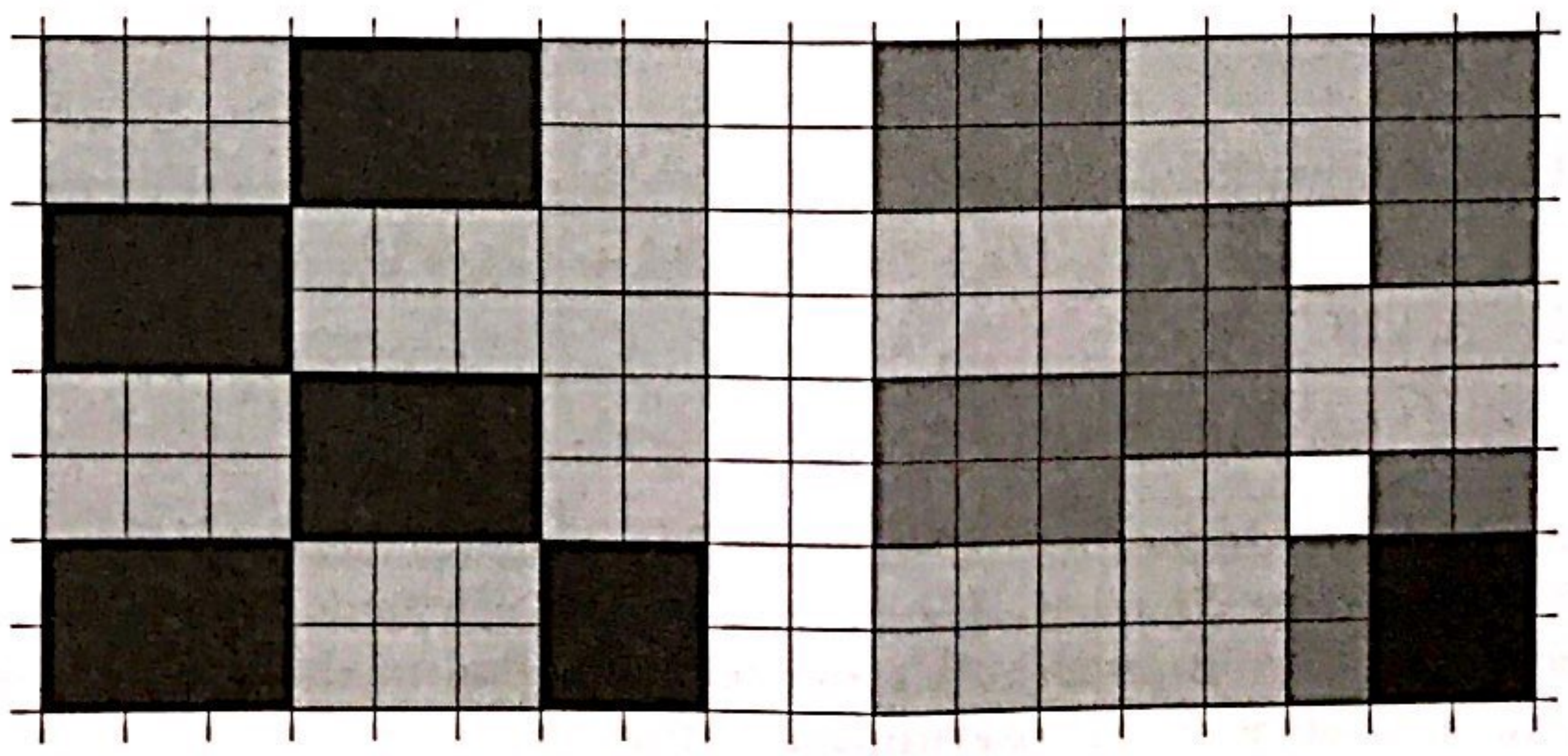
1. ábra



2. ábra

b) Vegyük észre, hogy egy 3×2-es részen, ha nem jelölünk ki legalább két mezőt, akkor van azon a 3×2-es részen egy üres L alakzat. Valóban, ha csak egy mezőt jelölünk meg, akkor az vagy sarokmező (a 2×3-as részben) vagy nem. A 2. ábra mutatja, hogy mindkét esetben van olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt.

Az eredeti tábla felbontható 10 diszjunkt 3×2-es részre és egy 2×2-es részre. Tehát, ha 20 mezőt jelöltünk meg, akkor két eset lehetséges: vagy üres a 2×2-es és minden 3×2-es részen van pontosan 2 megjelölt mező, vagy van olyan 3×2-es rész, amelyen legfeljebb egy mezőt jelöltünk meg. A második esetben az első észrevétel alapján van a táblán olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt (az egy megjelölt mezőt tartalmazó 3×2-es részen). Az első esetben a 2×2-es részt 3×3-as részre kiegészítve, ennek a darabnak 3 megjelölt mezőt kell tartalmaznia. Ennek a belátásához vegyünk két 2×3-as részt, amely közös része 2×2-es. Ha a közös rész üres, vagy egy megjelölt részt tartalmaz, akkor a közös részen kívüli 1×2-es részek mindegyike egy vagy két megjelölt mezőt kell tartalmazzon, vagyis összesen legalább hármat tartalmaz a 3×3-as rész. Ha a közös részen két megjelölt mező van, akkor 3×3-as rész megmaradt része (egy egyenlő szárú L alak) kell tartalmazzon legalább egy megjelölt mezőt. Így ebben az esetben is legalább 3 megjelölt mező van. A maradék táblán viszont további 9 darab páronként diszjunkt 3×2-es részt lehet beazonosítani, ezért ezek legalább további 18 megjelölt mezőt kellene tartalmazzanak ahhoz, hogy ne legyen olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt. Ez nem lehetséges mivel összesen csak 20 mező van megjelölve és $18+3=21>20$. Tehát a 20 megjelölt mező esetén biztosan van olyan L alakzat a táblán, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt. A következő két ábra szemlélteti a gondolatmenetnek ezt a részét.



6. Minden lépésben a jelenlegi helyzetünkhöz a $(0,13)$, $(13,0)$, $(5,12)$, $(12,5)$ vektorok valamelyikét adjuk hozzá. A vektorokból rendre a, b, c és d darabot felhasználva az

$$a\cdot(0,13)+b\cdot(13,0)+c\cdot(5,12)+d\cdot(12,5)$$

pontba jutunk. Akkor jutunk el a $(2022,2022)$ pontba, ha teljesül a

$$(2022,2022)=a\cdot(0,13)+b\cdot(13,0)+c\cdot(5,12)+d\cdot(12,5)$$

összefüggés, ahol a megtett lépések száma $(a+b+c+d)$, aminek keressük a minimumát.

Az előbbi egyenlőség alapján írhatjuk, hogy $\begin{cases} 13b+5c+12d=2022 \\ 13a+12c+5d=2022 \end{cases}$, majd az egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy $13(a+b)+17(c+d)=4044$.

Legyen $p=a+b$ és $q=c+d$, tehát p és q természetes számok. A $p+q$ összeg minimumát keressük úgy, hogy a $13p+17q=4044$ feltétel is teljesüljön. Mivel $4044=13p+17q=13(p+q)+4q$, ezért $p+q$ akkor minimális, ha q maximális.

A $13p+17q=4044$ diofantikus egyenlet megoldásai közül a feltételeknek megfelelő legnagyobb érték $q=231$, ekkor $p=9$. Tehát $p+q=a+b+c+d$ minimuma $231+9=240$. Ez a minimális lépésszám meg is valósítható, például ha a

$$(2022,2022)=1\cdot(0,13)+8\cdot(13,0)+122\cdot(5,12)+109\cdot(12,5)$$

felbontást tekintjük.

ELEMI OSZTÁLYOS TANULÓK RÉSZÉRE KITŰZÖTT FELADATOK*

E: 281. a) Írjuk le azokat a kétjegyű természetes számokat, amelyekben a számjegyek szorzata legfeljebb 6. Hány ilyen szám van?

b) Egy kék, egy fehér és egy piros dobókockával egyszerre dobunk, majd a kapott számokat összeadjuk. Hányféleképpen lehet 6 az összeg?

***

E: 282. Hét egymásutáni szám összege 14-szer nagyobb, mint a legnagyobb és legkisebb szám különbsége.

a) Melyik ez a hét szám?

b) Igazoljuk, hogy a középső szám egyenlő bármelyik két, tőle egyenlő távolságra levő szám összegének felével.

***

E: 283. Adottak a következő számok:

$A=[(2023:17-91):2-4]\cdot 50+5[(33+34+35)-2]$,

$B=2022:2-3(119:17)$,

$C=(2021-43\cdot 27):43-13$.

*Ezekre a feladatokra **2022. december 20-ig** fogadunk el megoldásokat I–V. osztályos tanulóktól, a **matlapmegoldasok@yahoo.com** címre. Kérjük az összesítőlapon a tanító nevét feltüntetni! **A feladatok megoldásához az elemi osztályokban tanult módszereket alkalmazzuk! Nincs szükség a feladatok algebrai megoldására, melyet V–VIII. osztályban tanítanak.**